العلاقة بين ارتفاع الفضاء التبولوجي المنتهي والبعد الاستقرائي الصغير

أ. رويدة عزالدين العبيدي

د. مفيدة محمد حميدة*

د. نهى الهادي الجمل

كلية العلوم - جامعة مصراته - ليبيا

*mu.hmaida@sci.misuratau.edu.ly

تاريخ الاستلام 2024.09.04 تاريخ النشر 2024.09.21

الملخص:

في هذه الورقة، نقدم عرضًا مفصلاً وشاملاً لأبرز خصائص البعد الاستقرائي الصغير للفضاءات الطوبولوجية المنتهية. نركز على استكشاف العلاقة بين ارتفاع الفضاء الطوبولوجي المنتهي وبعده الاستقرائي الصغير، موضحين كيفية تأثير كل من هذين المفهومين على تحليل الهيكل الطوبولوجي للفضاء. نبدأ بتوضيح أن ارتفاع الفضاء الطوبولوجي المنتهي من نوع T_0، وهو مقياس يعبر عن أقصى عمق يمكن أن يصل إليه الارتفاع في الفضاء، يتطابق مع ارتفاع أي نقطة في هذا الفضاء، شرط أن تكون تلك النقطة مجموعة مفتوحة. بعد ذلك، نستعرض كيفية مقارنة البعد الاستقرائي الصغير بارتفاع الفضاءات المنتهية، حيث نثبت أن البعد الاستقرائي الصغير في هذه الفضاءات يكون دائمًا إما أصغر من أو مساويًّا للارتفاع الكلي للفضاء. بالإضافة إلى ذلك، نناقش الحالة الخاصة للفضاءات المنتهية من نوع T_0، حيث يتطابق الارتفاع الكلي للفضاء تمامًا مع البعد الاستقرائي الصغير. لتوضيح هذه النقاط بشكل أفضل، نقدم أمثلة مفصلة لكل من هذه الحالات، مما يعزز فهم العلاقة بين البعد الاستقرائي الصغير وارتفاع الفضاءات الطوبولوجية بشكل شامل.

الكلمات المفتاحية: فضاء ألكسندروف، علوي جزئيًا، ارتفاع الفضاءات المنتهية، البعد الاستقرائي الصغير للفضاء المنتهي، قاعدة صغرى.

Relation between the Height of Finite Topological Space and the Small Inductive Dimension

Rowida E. Alabidy

Mufida M. Hmaida*

Noha A. Aljamel

Faculty of Science, Misurata University, Libya

*mu.hmaida@sci.misuratau.edu.ly

Received: 04.09.2024 Publishing: 21.09.2024

Abstract:

In this paper, we provide a detailed and comprehensive presentation of the key properties of the small inductive dimension for finite topological spaces. We focus on exploring the relationship between the height of a finite topological space and its small inductive dimension, clarifying how each of these concepts affects the analysis of the topological structure of the space. We start by explaining that the height of a finite T_0 topological space, which measures the maximum depth of the space's height, corresponds to the height of any point in the space, provided that the point is an open set. We then examine how the small inductive dimension compares to the height in finite spaces, demonstrating that the small inductive dimension is always less than or equal to the total height of the space. Additionally, we discuss the special case of finite T_0 spaces, where the total height of the space exactly matches the small inductive dimension. To further elucidate these points, we provide detailed examples for each case, enhancing the understanding of the relationship between the small inductive dimension and the height of topological spaces comprehensively.

Keywords: Alexandroff space, submaximal, Height of finite spaces, The Small Inductive Dimension of Finite Space, Minimal Basis.

1. مقدمة:

إذا كان $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضاء تبولوجي منتهي فهو يحقق خاصية التقاطع الاختياري للمجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة، أي أنه فضاء ألكسندروف Alexandroff space، ويرمز له بالرمز فضاء-$\mathcal{A}$.

الفضاء التبولوجي المنتهي يتميز بأنه لكل نقطة x في الفضاء التبولوجي X هناك أصغر مجموعة مفتوحة تحتوي هذه النقطة، تنتج هذه المجموعة من تقاطع كل المجموعات المفتوحة التي تحتوي هذه النقطة وتسمى أصغر مجموعة مفتوحة أساسية، ويرمز لها بالرمز U_x. عائلة كل المجموعات المفتوحة $\mathfrak{U} = \{U_x : x \in X\}$ تكون قاعدة للفضاء التبولوجي المنتهي X وتكون وحيدة ومحتواه داخل أي قاعدة أخرى وتسمى بالقاعدة الصغرى للفضاء.

الفضاء التبولوجي X يكون فضاء$-T_0$ إذا كان لأي نقطتين مختلفتين x, y في X توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحدى النقطتين ولا تحتوي الأخرى. الفضاء التبولوجي X يكون فضاء$-T_1$ إذا كان لأي نقطتين مختلفتين x, y في X توجد مجموعتان مفتوحتان U و V بحيث $x \in U$، $y \notin U$ و $y \in V$, $x \notin V$.

الفضاء التبولوجي X يسمى منتظم إذا كانت $F \subseteq X$ مغلقة و $x \notin F$، فإنه يوجد مجموعتان مفتوحتان U و V بحيث $F \subseteq U$ و $x \in V$ و $U \cap V = \emptyset$. أيضًا الفضاء التبولوجي مع قاعدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في آن واحد يكون فضاء منتظم.

العالم (R. Engelking) في كتابه (Dimension Theory 1978) درس نظرية الأبعاد للفضاءات التبولوجية بصورة عامة. العلاقة بين البعد الاستقرائي الصغير والبعد الاستقرائي الكبير والبعد الغطائي في فضاءات ألكسندروف$-T_0$ تمت دراستها من قبل الباحثين في الورقة (Georgiou et al., 2014) وغيرهم العديد من البحاث تناولوا الموضوع من زوايا مختلفة، مثلا في الدراسة (Georgiou et al., 2023) البحاث درسوا البعد الاستقرائي الصغير ضمن سياق الشبكات المحدودة. بالنسبة لنا كانت نقطة البداية الفضاءات التبولوجية المنتهية وفضاء الكسندروف ومنها دراسة بعض الخصائص، كما في الورقات (Hmaida et al., 2023), (Hmaida & Aljemal, 2023).

حيث بدأ البحث بتعريف المرتب المترابط، ومن ثم ارتفاع الفضاء التبولوجي المنتهي، وارتفاع نقطة في الفضاء، وتوضيح أن ارتفاع الفضاء المنتهي$-T_0$ مساوي لارتفاع نقطة في الفضاء، حيث تكون هذه النقطة مجموعة مفتوحة في الفضاء، بعد ذلك دراسة العلاقة بين ارتفاع الفضاء المنتهي والبعد الاستقرائي الصغير.

تمهيدية 1.1 [(May, 2003)، تمهيدية 7.1]: إذا كان X فضاء منتهي$-T_1$، فإنه يكون متقطع.

تمهيدية 2.1 [(El-Atik el al., 2002)، خاصية 4.4]: كل فضاء منتهي$-T_0$ مع قاعدة β من المجموعات المغلقة والمفتوحة في آن واحد يكون فضاء متقطع.

تعريف 3.1 (Kreminski, 2000): لتكن $\leq$ علاقة على X معرفة كالتالي:

$x \leq y$ إذا وفقط إذا كان $y \in U_x$ أي أن $U_y \subseteq U_x$.

مبرهنة 4.1 [(Ali & Al-Ani, 2018)، مبرهنة 10.1]: الفضاء التبولوجي المنتهي يكون منتظم إذا وفقط إذا كانت أي مجموعة مفتوحة تكون مغلقة.

مبرهنة 5.1: الفضاء التبولوجي المنتهي X يكون منتظم إذا وفقط إذا كان لديه قاعدة تشكل تجزئي للفضاء X.

تعريف 6.1 (Dontchev, 1995): الفضاء التبولوجي X يكون علوي جزئيًّا (submaximal) إذا كانت أي مجموعة جزئية كثيفة مفتوحة.

مبرهنة 7.1 [(Dontchev, 1995)، مبرهنة 1.1]: كل فضاء جزئي من فضاء علوي جزئيًّا يكون علوي جزئيّا.

مبرهنة 8.1 [(Dontchev, 1995)، مبرهنة 3.3]: الفضاء التبولوجي يكون فضاء علوي جزئيّا إذا وفقط إذا كان لكل $A \subseteq X$ يكون ∂A فضاء جزئي متقطع حيث $\partial A \neq \emptyset$.

مبرهنة 9.1 [(Mahdi & El-Atrash, 2005)، مبرهنة 2.5]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$. X يكون فضاء علوي جزئيًّا إذا وفقط إذا كان أي مجموعة وحيدة العنصر مغلقة أو مفتوحة.

2. ارتفاع الفضاءات المنتهية Height of finite spaces:

تعريف 1.2 (Georgiou et al., 2014): ليكن X فضاء ألكسندروف، فإن أي مرتب (α) حيث أن $\alpha \in X$ يكون مترابط. أيضًا المرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$، حيث $m \geq 1$ من العناصر المختلفة من X يسمى مترابط إذا وفقط إذا كان $\alpha_{i-1} \in \overline{\{\alpha_i\}}$ لكل $i \in \{1, \dots, m\}$.

ملاحظة: في حالة الفضاء منتهي في التعريف السابق تكون $1 \leq m \leq n-1$ حيث $|X| = n$.

مبرهنة 2.2 [(Georgiou et al., 2014)، خاصية 2.2]: ليكن X فضاء ألكسندروف و $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ حيث $m \geq 1$ عناصر مختلفة من X، فإن الجمل التالية تكون متكافئة:

1. المرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ يكون مترابط.

2. $\overline{\{\alpha_i\}} \subseteq \overline{\{\alpha_{i-1}\}}$ لكل $i \in \{1, \dots, m\}$.

3. $\alpha_i \in U_{\alpha_{i-1}}$ لكل $i \in \{1, \dots, m\}$.

مبرهنة 3.2 [(Georgiou et al., 2014)، خاصية 3.2]: ليكن X فضاء منتهي و Y فضاء جزئي من X. إذا كان المرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ مترابط من عناصر مختلفة من Y، فإن هذا المرتب يكون مترابط في X.

تعريف 4.2 (Georgiou et al., 2014): ارتفاع فضاء ألكسندروف X يرمز له بالرمز $h(X)$، يعرف كالتالي:

1. $h(X) = -1$ إذا وفقط إذا كان $X = \emptyset$.

2. $h(X) = k$ حيث $k \in \{0,1, \dots\}$، إذا وفقط إذا كان هناك مرتب$(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ مترابط من عناصر مختلفة من X وأي مرتب $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_k, \alpha'_{k+1})$ من عناصر مختلفة من X يكون غير مترابط.

مثال 1: إذا كان الفضاء التبولوجي X متقطع، فإن $h(X) = 0$.

مثال 2: ليكن $X = \{1,2,3, \dots, 9\}$ مع الفضاء التبولوجي المتولد بالقاعدة الصغرى

$$U_1 = \{1\}, U_2 = \{2\}, U_3 = \{2,3\}, U_4 = \{1,2,3,4\}, U_5 = \{5\},$$
$$U_6 = \{1,2,3,4,5,6\}, U_7 = \{7\}, U_8 = \{7,8\}, U_9 = \{9\}$$

لسهولة سوف نكتب $\bar{x}$ بدلاً من $\overline{\{x\}}$ وبالتالي:

$$\bar{1} = \{1,4,6\}, \bar{2} = \{2,3,4,6\}, \bar{3} = \{3,4,6\}, \bar{4} = \{4,6\}, \bar{5} = \{5,6\}, \bar{6} = \{6\},$$
$$\bar{7} = \{7,8\}, \bar{8} = \{8\}, \bar{9} = \{9\}$$

من ذلك يكون لدينا $\bar{6} \subseteq \bar{4} \subseteq \bar{3} \subseteq \bar{2}$ ، $\bar{4} \subseteq \bar{3} \subseteq \bar{2}$ ، $\bar{3} \subseteq \bar{2}$ ، $\bar{6} \subseteq \bar{4} \subseteq \bar{1}$ ، $\bar{4} \subseteq \bar{1}$ ، $\bar{6} \subseteq \bar{5}$ ، $\bar{8} \subseteq \bar{7}$ ، بالتالي من الفقرة (2) مبرهنة (**2.2**) أطول مرتب مترابط هو $(6,4,3,2)$ وبالتالي $h(X) = 3$.

مثال 3: ليكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و $\tau = \{\emptyset , X, \{2\}, \{1,2,3\}, \{2,4,5\}\}$

نلاحظ أن الفضاء ليس T_0 وأن $U_1 = \{1,2,3\} = U_3 \, , U_2 = \{2\}, U_4 =$ $U_5 = \{2,4,5\}$.

من ذلك يكون لدينا $U_2 \subseteq U_1 \subseteq U_3$ و $U_2 \subseteq U_4 \subseteq U_5$ من الفقرة (3) مبرهنة **(2.2)** وبالتالي أطول المرتبات المترابطة هي $(1,3,2), (3,1,2), (4,5,2), (5,4,2)$ أي أن $h(X) = 2$.

تعريف 5.2 (Georgiou et al., 2014): ارتفاع فضاء ألكسندروف X عند نقطة $x \in X$ يرمز له بالرمز $h_x(X)$، يعرف كالتالي:

$h_x(X) = k$ حيث $k \in \{0,1, \dots\}$، إذا وفقط إذا كان هناك مرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ مترابط من عناصر مختلفة من X وأن $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\} \cap U_x = \{\alpha_k\}$، وأي مرتب $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_{k+1})$ من عناصر مختلفة من X بحيث أن $\{\alpha'_0, \dots, \alpha'_{k+1}\} \cap U_x = \{\alpha'_{k+1}\}$ يكون غير مترابط.

ملاحظة: في التعريفين السابقين إذا كان الفضاء التبولوجي منتهي وعدد عناصره $|X| = n$، فإن $k \in \{0,1, \dots, n-1\}$، أي أن $h(X) \leq n-1$ و $h_x(X) \leq n-1$.

مبرهنة 6.2 [(Georgiou et al., 2014)، خاصية 6.2]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$، فإن: $h(X) = max\{h_x(X) : x \in X\}$.

مبرهنة 7.2 [(Georgiou et al., 2014)، خاصية 7.2]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$، فإنه يوجد $x_0 \in X$ حيث أن $\{x_0\}$ مجموعة جزئية مفتوحة من X و $h(X) = h_{x_0}(X)$.

مبرهنة 8.2 [(Georgiou et al., 2014)، خاصية 15.2]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$ و $x \in X$، فإن $h_x(X) \leq k$ إذا وفقط إذا كان $h(\partial U_x) \leq k-1$.

مبرهنة 9.2: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$ و $x \in X$، فإن $h_x(X) = k$ إذا وفقط إذا كان $h(\partial U_x) = k-1$.

البرهان: نفرض أن $h_x(X) = k$ بالتالي هناك مرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ مترابط من عناصر مختلفة من X وأن $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\} \cap U_x = \{\alpha_k\}$، وأي مرتب $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_{k+1})$ من عناصر مختلفة من X و $\{\alpha'_0, \dots, \alpha'_{k+1}\} \cap U_x = \{\alpha'_{k+1}\}$ يكون غير مترابط. بالتالي

$\alpha_k \in U_x$ ومنها $\alpha_k \subseteq U_{\alpha_k} \subseteq U_x$، وبهذا $\alpha_k \subseteq \overline{U_{\alpha_k}} \subseteq \overline{U_x}$ ومنها $\alpha_i \in \overline{U_{\alpha_k}} \subseteq \overline{U_x}$ حيث $i \in \{0, \dots, k-1\}$. أيضًا $\alpha_i \notin U_x$ ولذلك $\alpha_i \in \partial U_x$ وبالتالي المرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ يكون مترابط من عناصر مختلفة من ∂U_x. نفرض أن المرتب $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ مترابط من عناصر مختلفة من ∂U_x. وبما أن $\lambda_k \in \partial U_x$، فإن $U_{\lambda_k} \cap U_x \neq \emptyset$، بفرض $\lambda_{k+1} \in U_{\lambda_k} \cap U_x$ بالتالي $\lambda_{k+1} \in U_x$ وبما أن $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k\} \subseteq \partial U_x$ لذلك $\lambda_i \notin U_x$ حيث $i \in \{0, \dots, k\}$ عليه $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}\} \cap U_x = \{\lambda_{k+1}\}$ و $(\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$ مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X ولكن هذا يناقض الفرض. لذلك لا يوجد مرتب $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ مترابط من عناصر مختلفة من ∂U_x ومنها $h(\partial U_x) = k-1$. الاتجاه الأخر، نفرض أن $h(\partial U_x) = k-1$ هذا يعني أن هناك مرتب $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ مترابط من عناصر مختلفة من ∂U_x وأي مرتب $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_k)$ من عناصر مختلفة من ∂U_x يكون غير مترابط. بما أن $\alpha_{k-1} \in \partial U_x$ بالتالي $U_{\alpha_{k-1}} \cap U_x \neq \emptyset$ ومنها هناك $\alpha_k \in U_{\alpha_{k-1}}$ و $\alpha_k \in U_x$ وبذلك $\alpha_k \notin \partial U_x$ وكذلك $\alpha_i \notin U_x$ حيث $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ومنها $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\} \cap U_x = \{\alpha_k\}$ و $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$ مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X. إذا كان $(\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$ مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X و $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}\} \cap U_x = \{\lambda_{k+1}\}$ ، فإن $\lambda_{k+1} \in U_x$ هذا يعني أن $\lambda_{k+1} \notin \partial U_x$ وكذلك $\lambda_{k+1} \subseteq U_{\lambda_{k+1}} \subseteq U_x$ ومنها $\lambda_{k+1} \subseteq \overline{U_{\lambda_{k+1}}} \subseteq \overline{U_x}$ أي أن $\lambda_i \in \overline{U_x}$ حيث $i \in \{0, \dots, k\}$ وأيضًا $\lambda_i \notin U_x$ وبالتالي $\lambda_i \in \partial U_x$. ومن ذلك نجد أن المرتب $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ مترابط من عناصر مختلفة من ∂U_x وهذا يناقض الفرض. بالتالي لا يوجد مرتب $(\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$ مترابط من عناصر مختلفة من X بحيث أن $\{\lambda_0, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}\} \cap U_x = \{\lambda_{k+1}\}$ وهذا يبرهن أن $h_x(X) = k$.

3. البعد الاستقرائي الصغير للفضاء المنتهي The Small Inductive Dimension of Finite Space:

تعريف 1.3 (Mahdi et al., 2010; Georgiou et al., 2014) البعد الاستقرائي الصغير للفضاء التبولوجي X يرمز له بالرمز $ind(X)$، ويعرف كالتالي:

1. $ind(X) = -1$ إذا وفقط إذا كان $X = \emptyset$.

2. $ind(X) \leq k$، حيث $k \in \{0,1, \dots\}$ إذا كان لكل $x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة U حيث $x \in U$ هناك مجموعة مفتوحة V بحيث أن $x \in V \subseteq U$ و $ind(\partial V) \leq k - 1$.

3. $ind(X) = k$ إذا كان $ind(X) \leq k$ و $ind(X) \nleq k - 1$، في هذه الحالة لا توجد قاعدة β بحيث أن $ind(\partial B) \leq k - 2$ لكل $B \in \beta$.

نتيجة 2.3:

1. $\mathrm{ind(X)} \leq \mathrm{k}$ إذا كان X لديه قاعدة β بحيث أن $\mathrm{ind}(\partial \mathrm{B}) \leq \mathrm{k} - 1$ لكل $B \in \beta$.

2. إذا كان X فضاء منتهي، فإن $ind(X) \leq k$ ، حيث $k \in \{0,1, \dots, n - 1\}$ إذا وفقط إذا كان $ind(\partial U_x) \leq k - 1$ لكل $x \in X$.

3. في أي فضاء تبولوجي يكون لدينا $\partial B = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت B مجموعة مغلقة ومفتوحة في آن واحد، بالتالي فإن $ind(X) = 0$ إذا وفقط إذا كان X لديه قاعدة من المجموعات المغلقة والمفتوحة في آن واحد.

مبرهنة 3.3 [(Mahdi et al., 2010)، مبرهنة 3.3]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$، فإن $ind(X) = 0$إذا وفقط إذا كان X فضاء متقطع.

في حالة الفضاء ليس T_0، فإن المبرهنة السابقة ليست بالضرورة صحيحة والمثال التالي يبين ذلك.

مثال 4: ليكن $X = \{1,2,3\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}$ و $\mathfrak{U} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ قاعدة صغرى من المجموعات المغلقة والمفتوحة في آن واحد، وبالتالي $ind(X) = 0$ ولكن الفضاء ليس متقطع.

مبرهنة 4.3 [(Mahdi et al., 2010)، خاصية 5.3]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$، فإن $ind(X) = k$ إذا وفقط إذا كان $ind(\partial U_x) \leq k - 1$ لكل $U_x \in \mathfrak{U}$ وهناك $x_0 \in X$ بحيث أن $ind(\partial U_{x_0}) = k - 1$.

البرهان: نفرض أن $ind(X) = k$، بالتالي $ind(X) \leq k$ و $ind(X) \nleq k - 1$. $ind(X) \leq k$ تعني أن $ind(\partial U_x) \leq k - 1$ لكل $U_x \in \mathfrak{U}$. $ind(X) \nleq k - 1$

وبذلك لا توجد قاعدة β بحيث أن $ind(\partial B) \leq k-2$ لكل $B \in \beta$، ومنها هناك $x_0 \in X$ بحيث أن $ind(\partial U_{x_0}) > k-2$ أي أن $ind(\partial U_{x_0}) \geq k-1$، ولكن $ind(\partial U_{x_0}) \leq k-1$ بالتالي هناك $x_0 \in X$ بحيث أن $ind(\partial U_{x_0}) = k-1$. الاتجاه الأخر، نفرض أن $ind(\partial U_x) \leq k-1$ لكل $U_x \in \mathfrak{U}$ بالتالي $ind(X) \leq k$ وإذا كان هناك $x_0 \in X$ بحيث أن $ind(\partial U_{x_0}) = k-1$ هذا يعني أنه لا توجد قاعدة β بحيث $ind(\partial B) \leq k-2$ لكل $B \in \beta$، لأن $\mathfrak{U} \subseteq \beta$ ، وبهذا $ind(X) \nleq k-1$ وهذا يبرهن أن $ind(X) = k$.

مبرهنة 5.3 [(Mahdi et al., 2010)، **مبرهنة 6.3**]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$، فإن $ind(X) \leq 1$ إذا وفقط إذا كان علوي جزئيًا. إذا كان الفضاء لديه نقطتين مختلفتين x, y بحيث أن $x < y$، فإن $ind(X) = 1$.

مثال 5: ليكن $X = \{a, b\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$، الفضاء$-$ T_0 وهو علوي جزئيًا، لأن $\{a\}$ مجموعة مفتوحة و $\{b\}$ مجموعة مغلقة، و a, b نقطتين مختلفتين بحيث $b < a$ لذلك $ind(X) = 1$. نلاحظ أيضًا أن أطول مرتب مترابط هو (b, a) لذلك $h(X) = 1$.

في حالة الفضاء ليس T_0، فإن المبرهنة السابقة ليست بالضرورة صحيحة والمثال التالي يبين ذلك.

مثال 6: ليكن $X = \{1,2,3,4\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\}$، الفضاء ليس فضاء T_0 و $U_1 = \{1\}$ مجموعة مغلقة ومفتوحة في آن واحد بالتالي $\partial U_1 = \emptyset$ ولذلك $ind(\partial U_1) = -1$ ، ولدينا $U_2 = U_3 = \{2,3\}$ وبالتالي $\partial U_2 = \partial U_3 = \{4\}$ والفضاء التبولوجي الجزئي المناظر للمجموعة $\{4\}$ هو $\{\emptyset, \{4\}\}$ فضاء متقطع بالتالي $ind(\partial U_2) = ind(\partial U_3) = 0$. $U_4 = \{2,3,4\}$ مجموعة مغلقة ومفتوحة في آن واحد بالتالي $\partial U_4 = \emptyset$ وبالتالي $ind(\partial U_4) = -1$ ومن النتيجة (**2.3** الفقرة **2**) يكون $ind(X) \leq 1$، ولكن الفضاء ليس علوي جزئيًا لأن المجموعة الجزئية $\{1,2\}$ كثيفة ولكن ليست مفتوحة.

مبرهنة 6.3: ليكن X فضاء تبولوجي منتهي، فإن $ind(X) \leq h(X)$.

البرهان: باستخدام الاستقراء الرياضي. نفرض $h(X) = m$. إذا كان $m = 0$ هذا يعني أن أطول مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X هو (α)، بالتالي الفضاء متقطع و $ind(X) = 0$. نفرض الصحة لكل $0 \leq m \leq k - 1$. نفرض $h(X) = k$، ونبرهن أن $ind(X) \leq k$. نفرض $(\alpha_0, \dots, \alpha_l)$ مرتب مترابط من عناصر مختلفة من ∂U_x و $l \geq k$. بما أن $\alpha_l \in \partial U_x = \overline{U_x} \backslash U_x$ وبالتالي $U_{\alpha_l} \cap U_x \neq \emptyset$ و $\alpha_l \notin U_x$، نفرض $\alpha_{l+1} \in U_{\alpha_l} \cap U_x$، بالتالي $\alpha_l < \alpha_{l+1}$ و $\alpha_{l+1} \neq \alpha_l$ و $\alpha_{l+1} \notin \{\alpha_0, \dots, \alpha_l\}$، عليه $(\alpha_0, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1})$ مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X وهذا يناقض كون $h(X) = k$. بالتالي $l < k$، أي أن $h(\partial U_x) \leq k - 1$ ومن فرضية الاستقراء يكون $ind(\partial U_x) \leq k - 1$ لكل $x \in X$ ومن النتيجة (**2.3** الفقرة **2**) يكون $ind(X) \leq k = h(X)$.

مبرهنة 7.3 [(Mahdi et al., 2010)، مبرهنة 7.3]: ليكن X فضاء منتهي$-T_0$، فإن $h(X) = ind(X)$.

البرهان: إذا كان $h(X) = 0$ هذا يعني أن أطول مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X هو (α) وهذا يعني أن X فضاء متقطع ومنها $ind(X) = 0$. إذا كان $h(X) = 1$ هذا يعني أن أطول مرتب مترابط من عناصر مختلفة من X هو (α_0, α_1) أي أن $\alpha_0 < \alpha_1$ وتكون متحققة فقط عندما $\{\alpha_0\}$ مغلقة و $\{\alpha_1\}$ مفتوحة أي أن X يكون علوي جزئيًّا ومن المبرهنة (**5.3**) $ind(X) = 1$. الآن باستخدام الاستقراء الرياضي. نفرض أنه لأي فضاء Z منتهي$-T_0$ حيث $h(Z) < k$ يكون لدينا $ind(Z) = h(Z)$ لكل $k \geq 2$. ليكن X فضاء منتهي T_0 و $h(X) = k$ ولكل $x \in X$ يكون لدينا $h_x(X) \leq h(X) = k$ ومن المبرهنة (**8.2**) $h\big(\partial(U_x)\big) \leq k - 1 < k$، من الفرض $ind\big(\partial(U_x)\big) = h\big(\partial(U_x)\big) \leq k - 1$ وبالتالي $ind(X) \leq k$. وبما أن $h(X) = k$ بالتالي من المبرهنة (**7.2**) $h(X) = h_{\alpha_k}(X) = k$ حيث أن $\{\alpha_k\}$ مجموعة مفتوحة، ومن المبرهنة (**9.2**) يكون $h\left(\partial\left(U_{\alpha_k}\right)\right) = k - 1 < k$، ومن الفرض $ind\left(\partial\left(U_{\alpha_k}\right)\right) = k - 1$ ومن المبرهنة (**4.3**) يكون $ind(X) = k$ وهذا ينهي البرهان.

في حالة الفضاء ليس T_0، فإن المبرهنة السابقة ليست بالضرورة صحيحة والمثال التالي يبين ذلك.

مثال 7: ليكن $X = \{a, b, c, d\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ ، الفضاء ليس T_0 ولديه قاعدة صغرى من المجموعات المغلقة والمفتوحة $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ لذلك $ind(X) = 0$. وأطول المرتبات المترابطة هي $(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)$ وبالتالي $h(X) = 1 \neq ind(X)$.

المصادر والمراجع

Ali, R., & AL-Ani, A. (2018). The Number of Regular Topologies on a Finite Set, *URA-IJEAS*, *1*(2), 7-8.

Dontchev, J. (1995). On Submaximal Spaces, *Tamkang Journal of Mathematics*, *26*(3), 243-250. https://doi.org/10.5556/j.tkjm.26.1995.4402

EL-Atik, A., El-Monsef, M., & Lashin, E. (2002). On Finite T_0 Topological Spaces. Proceeding of the Ninth Prague Topological Symposium, (Prague 2001), 75-90, Topology Atlas, Toronto. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0204123

Georgiou, D., Megaritis, A., & Moshokoa, S. (2014). Small Inductive Dimension and Alexandroff Topological Spaces, *Topology and its Applications*, *168*, 103-119. https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.02.014

Georgiou, D., Prinos, G., & Sereti, F. (2023). A Study of the Small Inductive Dimension in the Area of Finite Lattices. *Order*, 1-25. https://doi.org/10.1007/s11083-023-09638-6

Hmaida, M., & Aljemal, N. (2023). A Study of Some Sets that Nearly Open Sets, *Journal of Science*, *15*, 85-89.

Hmaida, M., Aljemal, N., & Alabidy, R. (2023). Relations Between Almost Nearly Open Sets in Finite Topological Spaces, *Journal of Anwar Almarefa*, *13*, 357-365.

Kreminski, R. (2000). Graphs and Matrices in the Study of Finite Topological Spaces, Missouri Journal of Mathematical Sciences, *2*, 96-121.

May, J. (2003). Finite Topological Spaces. Notes for Research Experiences for Undergraduates (REU).

Mahdi, H., El-Mabhouh, A., & Said, N. (2010). Dimension and Continuity on T_0-Amlexandroff Spaces, Islamic University of Gaza, 1131-1140.

Mahdi, H., & El-Atrash, M. (2005). On T_0-Alexandroff Spaces, *the Islamic University Journal*, *13*(2), 19-46.